
الأستاذ
حيدر وليد
الفصل الخامس
المعادلات
التفاضلية
دار المغرب



هل ان $y = x^3 - x - 2$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} - 6x = 0$

2011 دور (1) — 2014 تمهيدي — 2017 دور (2) احيائي - خارج

Sol:

L.H.S

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - 6x = 0$$

R.H.S

اذن هي حل للمعادلة التفاضلية

هل ان $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $yy'' + (y')^2 - 3x = 5$ (2)

2011 دور (2)

Sol:

$$2yy' = 6x + 3x^2$$

$$2yy'' + 2y'.y' = 6 + 6x$$

$$yy'' + (y')^2 = 3 + 3x$$

$$yy'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 5$$

$$L.H.S \neq R.H.S$$

اذن هي ليست حل للمعادلة التفاضلية

هل ان $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $yy'' + (y')^2 - 3x = 3$

نفس خطوات الحل للسؤال السابق

وهي تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية



بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$

2011 خارج القطر — 2015 دور (4) رصافة — 2017 دور (1) احيائي - خارج

Sol:

$$y' = 2.e^{2x} - 3e^{-3x}$$

$$y'' = 4e^{2x} + 9e^{-3x} ....(1$$

$$y'' - y' - 6y = 0 ....(2$$

نعوض (1) في (2)

L.H.S

$$4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6(e^{2x} + e^{-3x})$$

$$\Rightarrow 6e^{2x} + 6e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x} = 0$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

اذن هي حل للمعادلة التفاضلية

بين ان $y = ae^{-x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y' + y = 0$ حيث $a \in R$ (4)

2012 تمهيدي — 2013 دور (2)

Sol:

$$y' = -ae^{-x}$$

$$L.H.S \quad y' + y = -a^{-x} + ae^{-x} = 0 = R.H.S$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

اذن هي حل للمعادلة التفاضلية

5 — 2013 دور (3) — 2014 دور (1)

بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية $x.y' = x^2 + y$

Sol:

$[y' = 2x + 3].x$

$xy' = 2x^2 + 3x$ L.H.S

$R.H.S: x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x$

$= 2x^2 + 3x$

$L.H.S = R.H.S$

اذن هي حلاً للمعادلة التفاضلية

6 — 2013 خارج القطر — 2015 دور (2)

بين ان $\ln|y| = x^2 + c$ حيث $c \in R$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' = 4x^2y + 2y$

Sol:

$\frac{1}{y}y' = 2x$

$y' = 2xy$

$y'' = 2xy' + 2y$

$y'' = 2x(2xy) + 2y$

$y'' = 4x^2y + 2y : L.H.S$

$4x^2y + 2y : R.H.S$

$\therefore L.H.S = R.H.S$

اذن هي تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية



7 — 2014 دور (2)

بين ان $\ln y^2 = x + a\ ,\ a \in R$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $2y' - y = 0$

Sol:

$\frac{1}{y^2}(2y)y' = 1$

$\frac{2y'}{y} = 1$

$2y' = y$

$2y' - y = 0$

اذن هي تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

8 — 2014 دور (3)

اثبت ان $y = x\ln x$ احد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y\ ,\ x > 0$

Sol:

$\frac{dy}{dx} = (x)(\frac{1}{x}) + \ln x(1) = 1 + \ln x$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة

$L.H.S: x\frac{dy}{dx} = x(1 + \ln x)$

$= x + x\ln x$

$R.H.S: x + y = x + x\ln x$

$\because\ L.H.S = R.H.S$

$\therefore$ هي تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

اثبت ان $2x^2+y^2=1$ هو حلاً للمعادلة $y^3y''=-2$

9

2015 دور (1) خارج
2016 دور (2)
2018 دور (1) احيائي - داخل

Sol :

$$2x^2+y^2=1$$
$$4x+2yy'=0$$
$$2yy'=-4x$$
$$y'=\frac{-4x}{2y}$$
$$y'=-\frac{2x}{y}$$
$$y''=\frac{(y)(-2)-(-2x)(y')}{y^2}$$
$$y''=\frac{-2y+2x(y')}{y^2}$$
$$y''=\frac{-2y+2x(\frac{-2x}{y})}{y^2}$$
$$y''=\frac{\frac{-2y^2-4x^2}{y}}{y^2}$$
$$y''=\frac{-2y^2-4x^2}{y^3}$$
$$y''=\frac{-2(y^2+2x^2)}{y^3}$$
$$y''=\frac{-2}{y^3}$$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة

$$L.H.S: y^3y''=y^3(\frac{-2}{y^3})=-2$$
$$L.H.S=R.H.S$$

اذن العلاقة هي تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

10

اثبت ان $y = x\ln x - x$ احد حلول للمعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y \ , \ x > 0$

2016 تمهيدي

Sol :

$$\frac{dy}{dx} = (x)(\frac{1}{x}) + \ln x(1) - 1$$

$$= \ln x$$

L.H.S

$$x\frac{dy}{dx} = x\ln x$$

$$R.H.S : x + y = x + x\ln x - x$$

$$= x\ln x$$

$$L.H.S = R.H.S$$

اذن هي تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

2018 دور (2) احيائي - داخل

2017 دور (2) تطبيقي - خارج



11

هل ان $2x^2 - y^2 = 1$ هو حلا للمعادلة $yy'' + (y')^2 = -2$

2017 دور (3) احيائي - داخل

Sol :

$$2x^2 - y^2 = 1$$

$$4x - 2yy' = 0 \Rightarrow$$

$$4 - (2yy'' + y'.2y') = 0$$

$$4 - 2yy'' - y'.2y' = 0] * -1$$

$$[2yy'' + 2(y')^2 - 4 = 0] \div 2$$

$$yy'' + (y')^2 - 2 = 0$$

$$yy'' + (y')^2 = 2$$

نعم تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية



12

هل ان $y = x + 2$ هو حلا للمعادلة $y'' + 3y' + y = x$

2017 دور (3) احيائي - داخل

2018 دور (1) تطبيقي - خارج

Sol :

$$y = x + 2$$

$$y' = 1 \Rightarrow y'' = 0$$

L.H.S :

$$y'' + 3y' + y$$

$$\Rightarrow 0 + 3 + x + 2 = x + 5 \neq R.H.S$$

$$\therefore L.H.S \neq R.H.S$$

اذن العلاقة هي ليست حلاً للمعادلة التفاضلية

هل ان $y=\frac{1}{2}xe^{x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y''-y=e^{x}$

13

Sol:

2018 دور (2) احيائي - خارج

$$y=\frac{1}{2}xe^{x}$$

$$y'=\frac{1}{2}xe^{x}+\frac{1}{2}e^{x}$$

$$y''=\frac{1}{2}xe^{x}+\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{2}e^{x}$$

$$y''=\frac{1}{2}xe^{x}+e^{x}$$

L.H.S:

$$y''-y=\frac{1}{2}xe^{x}+e^{x}-\frac{1}{2}xe^{x}$$

$$=e^{x}=R.H.S$$

اذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية

برهن ان $y=3\cos 2x+2\sin 2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y''+4y=0$

14

2012 دور (1)

2015 تمهيدي

Sol:

$$y=3\cos 2x+2\sin 2x$$

$$y'=-6\sin 2x+4\cos 2x$$

$$y''=-12\cos 2x-8\sin 2x$$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة الايسر

$$L.H.S: y''+4y\Rightarrow$$

$$(-12\cos 2x-8\sin 2x)+4(3\cos 2x+2\sin 2x)$$

$$=-12\cos 2x-8\sin 2x+12\cos 2x+8\sin 2x$$

$$=0=R.H.S$$

اذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية

2016 دور (2) خارج

2017 دور (1) احيائي - داخل

2019 تمهيدي احيائي

برهن ان $y = \sin x$ هو حلاً للمعادلة
$y'' + y = 0$

15

2012 خارج القطر

Sol :

$y = \sin x$

$y' = \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x$

L.H.S :

$y'' + y = -\sin x + \sin x$

$= 0 = R.H.S$

اذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية

برهن ان $y = \cos x$ هو حلاً للمعادلة
التفاضلية $y'' + y = 0$

16

2002 نازحين

Sol :

$y = \cos x$

$y' = -\sin x \Rightarrow y'' = -\cos x$

L.H.S :

$y'' + y = -\cos x + \cos x$

$= 0 = R.H.S$

اذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية

$yx = \sin 5x$ حلاً للمعادلة
$xy'' + 2y' + 25yx = 0$

17

2015 دور (2) خارج

2019 دور (1) احيائي

2018 تمهيدي ج.1

Sol :

$yx = \sin 5x$

$y + xy' = 5\cos 5x$

$y' + xy'' + y' = -25\sin 5x$

$xy'' + 2y' + 25\sin 5x = 0$

$xy'' + 2y' + 25xy = 0$

اذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية

2016 دور (1) خارج

2018 تمهيدي - احيائي

هل يمثل $y = \sin 6x$ هو حلاً للمعادلة
التفاضلية $y'' + 36y = 0$ ؟ بين ذلك

18

2018 دور (2) تطبيقي - خارج

Sol :

$y = \sin 6x \Rightarrow$

$y' = 6\cos 6x \Rightarrow y'' = -36\sin 6x$

L.H.S :

$y'' + 36y = -36\sin 6x + 36\sin 6x$

$= 0 : R.H.S$

اذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية

19

هل ان $y = \tan x$ هو حلاً للمعادلة $y'' = 2y(1+y^2)$

2018 دور (2) تطبيقي - داخل

Sol :

$$y = \tan x$$

$$y' = \sec^2 x$$

$$y'' = 2\sec x.\sec x.\tan x$$

$$y'' = 2\tan x.\sec^2 x$$

L.H.S :

$$y'' = 2\tan x.\sec^2 x$$

$$R.H.S : 2y(1+y^2) \Rightarrow$$

$$2\tan x(1+\tan^2 x) \Rightarrow$$

$$= 2\tan x \sec^2 x$$

$$L.H.S = R.H.S$$

اذن العلاقة المعطاة هي حلاً للمعادلة التفاضلية



20

هل ان العلاقة $y^2 = 3x^2 + x^3$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $yy'' + (y')^2 - 3x = 8$

2019 تمهيدي تطبيقي

Sol :

$$y^2 = 3x^2 + x^3$$

$$2yy' = 6x + 3x^2$$

$$2[y.y'' + y'.y'] = 6 + 6x] \div 2$$

$$y.y'' + (y')^2 = 3 + 3x$$

$$y.y'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 8$$

اذن لا تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية



21

هل تمثل $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 2$ ؟ بين ذلك

2019 دور (1) احيائي - خارج

Sol :

$$y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$$

$$y' = -6\sin 2x + 4\cos 2x$$

$$y'' = -12\cos 2x - 8\sin 2x$$

$$-12\cos 2x - 8\sin 2x + 4(3\cos 2x + 2\sin 2x)$$

$$-12\cos 2x - 8\sin 2x + 12\cos 2x + 8\sin 2x = 0$$

$0 \neq 8$ لا تمثل حلاً

هل ان $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\cos x}$ بين ذلك

22

2019 دور (3) احيائي

Sol:

$$y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

$$y'=\frac{(1+\cos x)\cos-[\sin x(-\sin x)]}{(1+\cos x)^2}$$

$$y'=\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$ قاعدة ذهبية

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cancel{\cos x+1}}{\cancel{(1+\cos x)}(1+\cos x)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\cos x}$$

اذن تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

هل ان $yx=\sin 5x$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $xy''+2y'+25yx=8$ بين ذلك



2019 دور (2) احيائي

Sol:

$$yx=\sin 5x$$

$$y+xy'=5\cos 5x$$

$$y'+xy''+y'=-25\sin 5x$$

$$xy''+2y'+25\sin 5x=0$$

$$xy''+2y'+25xy=0\neq 8$$

اذن لا تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

هل يمثل $y=\tan x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $2yy'-y''=0$ بين ذلك



2019 دور (1) تطبيقي - خارج

Sol:

$$y=\tan x$$

$$y'=\sec^2 x$$

$$y''=2\sec x.\sec x.\tan x$$

$$=2\sec^2 x.\tan x$$

$$2\tan x.\sec^2 x-2\sec^2 x.\tan x=0$$

اذن تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

25 جد حل المعادلة التفاضلية $y' = 2e^x y^3$ حيث $x = 0 \; , \; y = \frac{1}{2}$

2019 دور (3) احيائي

Sol:

$$\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3$$

$$dy = 2e^x y^3 \; dx \Big] \div y^3$$

$$\frac{dy}{y^3} = 2e^x \; dx$$

$$\int y^{-3} \; dy = \int 2e^x \; dx$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = 2e^x + c$$

$$\frac{-1}{2y^2} = 2e^x + c$$

عندما $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$

$$\frac{-1}{2(\frac{1}{2})^2} = 2e^0 + c$$

$$\frac{-1}{\not{2}(\frac{1}{\not{4}})} = 2(1) + c$$

$$-2 = 2 + c$$

$$c = -4$$

$$\frac{-1}{2y^2} = 2e^x - 4$$

26 حل للمعادلة التفاضلية

$$e^x dx - y^3 dy = 0$$

2011 دور (2)

Sol:

$$y^3 \; dy = e^x \; dx$$

$$\int y^3 \; dy = \int e^x \; dx$$

$$\frac{1}{4} y^4 = e^x + c$$



27 حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$

2011 دور (1)

2014 نازحين

2018 دور (2) تطبيقي - داخل

Sol:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$$

$$(3y^2 + e^y) \; dy = \cos x \; dx$$

$$\int (3y^2 + e^y) \; dy = \int \cos x \; dx$$

$$y^3 + e^y = \sin x + c$$

2019 دور (2) تطبيقي

حل للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=(x+1)(y-1)$

حيث $x=2\ ,\ y=2$



2012 دور (2)

2018 دور (1) احيائي - خارج

Sol:

$$\frac{dy}{dx}=(x+1)(y-1)$$

$$\frac{dy}{(y-1)}=(x+1)\ dx$$

$$\int\frac{dy}{(y-1)}=\int(x+1)\ dx$$

$$\ln|y-1|=\frac{1}{2}x^2+x+c$$

$$\ln|2-1|=\frac{1}{2}(4)+2+c$$

$$0=4+c\Rightarrow c=-4$$

$$\ln|y-1|=\frac{1}{2}x^2+x-4$$

حل للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}+xy=3x$

حيث $x=1\ ,\ y=2$



2013 دور (2)

2014 دور (3)

Sol:

$$\frac{dy}{dx}=3x-xy$$

$$\frac{dy}{dx}=x(3-y)$$

$$\frac{dy}{3-y}=x\ dx$$

$$\int\frac{dy}{3-y}=\int x\ dx$$

$$-\ln|3-y|=\frac{1}{2}x^2+c$$

$$-\ln|3-2|=\frac{1}{2}+c$$

$$0=\frac{1}{2}+c\Rightarrow c=-\frac{1}{2}$$

$$-\ln|3-y|=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

30 جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\tan^2 y\ dy = \sin^3 x\ dx$$

2014 دور (4) انبار

Sol:

$$\int \tan^2 y\ dy = \int \sin^3 x\ dx$$

$$\int (\sec^2 y - 1)\ dy = \int \sin x . \sin^2 x\ dx$$

$$\int (\sec^2 y - 1)\ dy = \int \sin x(1-\cos^2 x)\ dx$$

$$\int (\sec^2 y - 1)\ dy = \int (\sin x - \cos^2 x \sin x)\ dx$$

$$\tan y - y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$$

2017 دور (2) تطبيقي - خارج

2017 دور (3) تطبيقي - داخل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

31 حل المعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{\cos^2 y}{x} \quad , y = \frac{\pi}{4}\ , x = 1$$

2014 تمهيدي

2018 تمهيدي - احيائي

2018 دور (3) تطبيقي - داخل

Sol:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{x}$$

$$\frac{1}{\cos^2 y} dy = \frac{1}{x} dx$$

$$\sec^2 y\ dy = \frac{1}{x}\ dx$$

$$\int \sec^2 y\ dy = \int \frac{1}{x}\ dx$$

$$\tan y = \ln|x| + c$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = \ln 1 + c$$

$$1 = 0 + c \Rightarrow c = 1$$

$$\tan y = \ln|x| + 1$$

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$dy = \sin x \cos^2 y\ dx$$

حيث $\cos y \neq 0\ ,\ y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$

2019 دور (3) تطبيقي

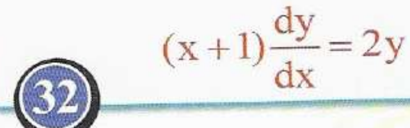
Sol:

$$dy = \sin x \cos^2 y\ dx \Big] \div \cos^2 y$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x\ dx$$

$$\int \sec^2 y\ dx = \int \sin x\ dx$$

$$\tan y = -\cos x + c$$



جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x+1)\frac{dy}{dx}=2y$$

32

2015 دور (2)

Sol :

$$(x+1)\frac{dy}{dx}=2y$$

$$(x+1)\ dy=2y\ dx$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{2\ dx}{x+1}$$

$$\int\frac{dy}{y}\qquad\int\frac{2\ dx}{x+1}$$

$$\ln|y|=2\ln(x+1)+c$$

$$\ln|y|=\ln(x+1)^2+c$$

$$\ln|y|=\ln(x+1)^2+\ln c_1$$

$$\ln|y|=\ln c_1(x+1)^2$$

$$|y|=c_1(x+1)^2$$

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{6y^2+e^y}$

33

2015 دور (3)

2017 دور (2) تطبيقي - موصل

Sol:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{6y^2+e^y}$$

$$(6y^2+e^y)\ dy=\sin x\ dx$$

$$\int(6y^2+e^y)\ dy=\int\sin x\ dx$$

$$2y^3+e^y=-\cos x+c$$

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{3y^2}$


34

2011 خارج القطر

Sol:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{3y^2}$$

$$3y^2\ dy=\cos x\ dx$$

$$\int 3y^2\ dy=\int\cos x\ dx$$

$$y^3=\sin x+c$$

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$xy\frac{dy}{dx}+y^2=1-y^2$$



2016 دور (1) خارج

Sol:

$$xy\frac{dy}{dx}+y^2=1-y^2$$

$$xy\frac{dy}{dx}=1-y^2-y^2$$

$$xy\ dy=(1-2y^2)\ dx$$

$$\frac{y}{(1-2y^2)}\ dy=\frac{1}{x}\ dx$$

$$\int\frac{y}{(1-2y^2)}\ dy=\int\frac{1}{x}\ dx$$

$$-(\frac{1}{4})\int\frac{-4y}{1-2y^2}\ dy=\int\frac{1}{x}\ dx$$

$$-\frac{1}{4}\ln|1-2y^2|=\ln|x|+c$$

$$\ln\left|(1-2y^2)^{\frac{-1}{4}}\right|=\ln|x|+\ln c_1\ ,\ c_1>0$$

$$\ln\left|(1-2y^2)^{\frac{-1}{4}}\right|=\ln|c_1x|$$

$$\left|(1-2y^2)^{\frac{-1}{4}}\right|=|c_1x|$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-2y^2}}=c_1x$$

اوجد حل المعادلة التفاضلية

$y'-x\sqrt{y}=0$ عندما $x=2\ ,\ y=9$



2016 دور (1)

2017 دور (1) تطبيقي - داخل

Sol:

$$\frac{dy}{dx}-x\sqrt{y}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=x\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}}=x\ dx$$

$$\int y^{\frac{-1}{2}}\ dy=\int x\ dx$$

$$2y^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^2+c$$

$$2\sqrt{y}=\frac{1}{2}x^2+c$$

$x=2\ ,y=9$

$$2\sqrt{9}=\frac{1}{2}(2)^2+c$$

$$6=2+c$$

$$c=4$$

$$2\sqrt{y}=\frac{1}{2}x^2+4$$

37 حل للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = e^{2x.y}$ حيث $x = 0 , y = 0$

2017 دور (2) احيائي - داخل

Sol:

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}.e^{y}$$

$$\frac{dy}{e^{y}} = e^{2x}\ dx \Rightarrow e^{-y}\ dy = e^{2x}\ dx$$

$$\int e^{-y}\ dy = \int e^{2x}\ dx$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c \qquad \boxed{x = 0\ ,\ y = 0}$$

$$-e^{0} = \frac{1}{2}e^{0} + c \Rightarrow -1 = \frac{1}{2} + c$$

$$c = -\frac{3}{2}$$

$$-e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}$$

$$\left[\frac{-1}{e^{y}} = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}\right].(2)$$

$$\frac{-2}{e^{y}} = e^{2x} - 3$$



38 حل المعادلة التفاضلية

$$yy' = 4\sqrt{(1+y^{2})^{3}}$$

2017 دور (2) تطبيقي - داخل

Sol:

$$y\frac{dy}{dx} = 4\sqrt{(1+y^{2})^{3}}$$

$$\frac{y}{\sqrt{(1+y^{2})^{3}}}\ dy = 4\ dx$$

$$(1+y^{2})^{\frac{-3}{2}}\ y\ dy = 4\ dx$$

$$\int (1+y^{2})^{\frac{-3}{2}}\ y\ dy = \int 4\ dx$$

$$\frac{1}{2}\int (1+y^{2})^{\frac{-3}{2}}\ 2y\ dy = \int 4\ dx$$

$$-(1+y^{2})^{-\frac{1}{2}} = 4x + c$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+y^{2}}} = 4x + c$$

39

حل المعادلة التفاضلية

$$e^{x+2y} + y' = 0$$

2017 دور (1) تطبيقي - داخل

2019 دور (1) تطبيقي

Sol:

$$e^{x}.e^{2y} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -e^{x}.e^{2y}$$

$$\frac{dy}{e^{2y}} = -(e^{x})\ dx$$

$$\int e^{-2y}\ dy = -\int e^{x}\ dx$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2y} = -e^{x} + c$$

$$\frac{-1}{2e^{2y}} = -e^{x} + c$$

40

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الاتية

$$\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$$



2019 دور (1) احيائي

Sol:

$$\sin x \cos y \frac{dy}{dx} = -\cos x \sin y$$

$$\sin x.\cos y\ dy = -\cos x \sin y\ dx \Big] \div \sin x \sin y$$

$$\frac{\cos y}{\sin y}\ dy = \frac{-\cos x}{\sin x}\ dx$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y}\ dy = \int \frac{-\cos x}{\sin x}\ dx$$

$$\text{Ln} \sin y = -\text{Ln} \sin x + c$$



41

حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

2012 دور (2) — 2013 دور (1) — 2016 تمهيدي

Sol:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$$

$$v = \frac{y}{x}$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + e^{v} ....(1$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} ....(2$$

نعوض (2) في (1)

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + e^{v} ......(3$$

$$x\frac{dv}{dx} = e^{v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{e^{v}}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int e^{-v}\ dv$$

$$\ln|x| = -e^{-v} + c$$

$$\ln|x| = -e^{\frac{-y}{x}} + c$$

$$\ln|x| = \frac{-1}{e^{\frac{y}{x}}} + c$$

2017 دور (2) تطبيقي - موصل — 2018 دور (1) تطبيقي - خارج

42

حل المعادلة التفاضلية

$$x\left(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}\right) = y$$

2012 خارج القطر — 2014 دور (4) الانبار

Sol:

$$\left(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$$

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \tan v + v......(1$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}......(2$$

نعوض (2) في (1)

$$v + x\frac{dv}{dx} = \tan v + v......(3$$

$$x\frac{dv}{dx} = \tan v \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{\tan v}\ dv$$

$$\frac{dx}{x} = \cot v\ dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{\cos v}{\sin v}\ dv \Rightarrow$$

$$\ln|x| = \ln|\sin v| + \ln|c|, c > 0$$

$$\ln|x| = \ln|c(\sin v)|$$

$$|x| = |c(\sin v)|$$

$$x = \pm\ c(\sin v)$$

$$x = \pm\ c(\sin\frac{y}{x})$$

2017 دور (1) تطبيقي - داخل

43

حل المعادلة التفاضلية $2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$

2012 دور (1) — 2012 تمهيدي — 2015 دور (1) — 2015 تمهيدي — 2015 دور (1) — 2017 دور (2) احيائي - خارج — 2019 دور (2) احيائي — 2019 دور (1) تطبيقي - خارج — 2019 تمهيدي احيائي — 2018 دور (2) تطبيقي - خارج — 2018 دور (3) تطبيقي - داخل

Sol:

$$2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2+y^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2}$$

نفرض ان $\frac{y}{x}=v$ لينتج

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+v^2}{2}......(1$$

$$\frac{y}{x}=v$$

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}.......(2$$

نعوض (2) في (1)

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\left(\frac{1+v^2-2v}{2}\right)$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}(v^2-2v+1)$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1}{2}(v-1)^2$$

$$\frac{dx}{2x}=\frac{1}{(v-1)^2}\ dv$$

$$\int\frac{dx}{2x}=\int\frac{1}{(v-1)^2}\ dv$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}=\int(v-1)^{-2}\ dv$$

$$\frac{1}{2}\ln|x|=-(v-1)^{-1}+c$$

$$\frac{1}{2}\ln|x|=\frac{-1}{v-1}+c\Rightarrow\frac{-1}{v-1}=\frac{1}{2}\ln|x|-c$$

$$\frac{-1}{v-1}=\frac{\ln|x|-2c}{2}$$

$$\frac{v-1}{-1}=\frac{2}{\ln|x|-2c}\Rightarrow v-1=\frac{-2}{\ln|x|-2c}$$

$$v=1-\frac{2}{\ln|x|-2c}\Rightarrow\frac{y}{x}=1-\frac{2}{\ln|x|-2c}$$

$$y=x-\frac{2x}{\ln|x|-2c}\Rightarrow \text{let } 2c=c_1$$

$$y=x-\frac{2x}{\ln|x|-c_1}$$



حل المعادلة التفاضلية $xy' = y - x$

حيث $x = 1 \ , y = 1$

44

2013 دور (3)

2015 دور (1) خارج

Sol:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1$$

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v - 1 .....(1$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} .....(2$$

نعوض (2) في (1)

$$v + x\frac{dv}{dx} = v - 1$$

$$x.\frac{dv}{dx} = -1 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int dv \Rightarrow \ln|x| = -v + c$$

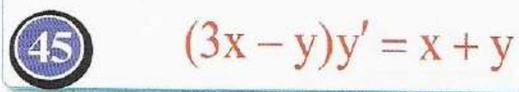
$$\ln|x| = -\frac{y}{x} + c \Rightarrow \ln|1| = -1 + c$$

$$0 = -1 + c \Rightarrow c = 1$$

$$\ln|x| = -\frac{y}{x} + 1$$

حل المعادلة التفاضلية

45



$$(3x-y)y'=x+y$$

2013 دور (2)

Sol :

$$(3x-y)y'=x+y$$

$$y'=\frac{x+y}{(3x-y)}$$

نقسم البسط والمقام على $x \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{3x-y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x}{x}+\frac{y}{x}}{\frac{3x}{x}-\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}}{3-\frac{y}{x}}$$

نفرض ان $\frac{y}{x}=v$ لينتج

$$\frac{y}{x}=v$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+v}{3-v}.....(1$$

نشتق العلاقة $y=vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}......(2$$

نعوض (2) في (1)

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v}{3-v}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{(1+v)-v(3-v)}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v-3v+v^2}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1-2v+v^2}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{(1-v)^2}{3-v}\Rightarrow\frac{dx}{x}=\frac{(3-v)}{(1-v)^2}\,dv$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{2+(1-v)}{(1-v)^2}\,dv$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{2}{(1-v)^2}\,dv+\frac{(1-v)}{(1-v)^2}\,dv$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{2}{(1-v)^2}\,dv+\int\frac{1}{(1-v)}\,dv$$

$$\ln|x|=(-2)\left[-(1-v)^{-1}\right]-\ln|1-v|+c$$

$$\ln|x|+\ln|1-v|=\frac{2}{(1-v)}+c$$

$$\ln|x(1-v)|=\frac{2}{(1-v)}+c$$

$$\ln\left|x(1-\frac{y}{x})\right|=\frac{2}{(1-\frac{y}{x})}+c$$

$$\ln|x-y|=\frac{2}{(1-\frac{y}{x})}+c$$

$$\ln|x-y|=\frac{2}{(\frac{x-y}{x})}+c$$

$$\ln|x-y|=\frac{2x}{x-y}+c$$

حل المعادلة التفاضلية

$$2xyy' - y^2 + x^2 = 0$$

46

2013 خارج القطر

2018 دور (1) احيائي - داخل

Sol:

$$2xyy' = y^2 - x^2$$

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

نقسم البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2 - x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})^2 - 1}{2(\frac{y}{x})}$$

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(v)^2 - 1}{2(v)} \text{......(1}$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \text{......(2}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1 - 2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2 - 1}{2v}$$

$$-(v^2 - 1)\, dx = 2xv\, dv$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-2v\, dv}{v^2 + 1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2v\, dv}{v^2 + 1}$$

$$\ln|x| = -\ln|v^2 + 1| + \ln c \;, \boxed{c > 0}$$

$$\ln|c| = \ln|x| + \ln|v^2 + 1|$$

$$\ln|c| = \ln|x(v^2 + 1)|$$

$$c = \pm x(v^2 + 1)$$

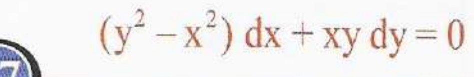
$$c = \pm x\left[(\frac{y}{x})^2 + 1\right]$$

$$c = \pm x\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)$$

$$c = \pm x\left(\frac{y^2 + x^2}{x^2}\right)$$

$$c = \pm\left(\frac{y^2 + x}{x}\right)$$

حل المعادلة التفاضلية



$$(y^2 - x^2)\, dx + xy\, dy = 0$$

47

2014 دور (2)

Sol:

$$xy\, dy = -(y^2 - x^2)\, dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{xy}$$

نقسم البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2 - y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - (\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}}$$

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - v^2}{v} \text{.......(1}$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \text{......(2}$$

نعوض (2) في (1)

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{v}$$

2017 دور (1) احيائي - داخل

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2 - v^2}{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - 2v^2}{v}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{v\, dv}{1 - 2v^2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{v\, dv}{1 - 2v^2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{4}\int \frac{-4v\, dv}{1 - 2v^2}$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{4}\ln\left|1 - 2v^2\right| + \ln c \;, \quad c > 0$$

$$\ln|x| = -\ln\left|(1 - 2v^2)^{\frac{1}{4}}\right| + \ln c$$

$$\ln|c| = \ln\left|(1 - 2v^2)^{\frac{1}{4}}\right| + \ln|x|$$

$$\ln|c| = \ln\left|x\sqrt[4]{1 - 2v^2}\right|$$

$$c = \pm x\sqrt[4]{1 - 2v^2}$$

$$c = \pm x\sqrt[4]{1 - 2(\frac{y}{x})^2}$$

2018 دور (3) احيائي - داخل

2017 دور (3) تطبيقي - داخل

48

حل المعادلة التفاضلية

$(x+2y)\,dx + (2x+3y)\,dy = 0$

2014 نازحين

Sol:

$$(2x+3y)\,dy = -(x+2y)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-x-2y}{x}}{\frac{2x+3y}{x}}$$

نقسم البسط والمقام على $x \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1-2(\frac{y}{x})}{2+3(\frac{y}{x})}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1-2v}{2+3v} \ldots\ldots(1$$

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ldots\ldots(2$$

نعوض (2) في (1)

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-2v}{2+3v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-2v}{2+3v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-2v-v(2+3v)}{2+3v}$$

$$\left[x\frac{dv}{dx} = \frac{-1-2v-2v-3v^2}{2+3v}\right] \times -1$$

$$-x\frac{dv}{dx} = \frac{1+4v+3v^2}{2+3v}$$

$$-\int\frac{dx}{x} = \int\frac{2+3v}{1+4v+3v^2}\,dv$$

$$-\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int\frac{2(2+3v)}{1+4v+3v^2}\,dv$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{2}\ln\left|1+4v+3v^2\right| + c$$

$$-c = \ln\left|(1+4v+3v^2)^{\frac{1}{2}}\right| + \ln|x|$$

$$\ln c_1 = \ln\left|x\sqrt{1+4v+3v^2}\right| \quad , c_1 > 0$$

$$c_1 = \left|x.\sqrt{1+4v+3v^2}\right|$$

$$c_1 = \left|\sqrt{x^2+4xy+3y^2}\right|$$

....

....

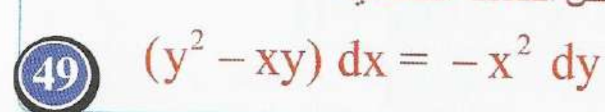
....

....

....

....





حل المعادلة التفاضلية

49 $(y^2 - xy)\,dx = -x^2\,dy$

Sol:

$x^2\,dy = -(y^2 - xy)\,dx$

$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{xy - y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - (\frac{y}{x})^2$

$\frac{dy}{dx} = v - v^2 ......(1$

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$\frac{y}{x} = v$

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} ....(2$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

نعوض 2 في 1

$v + x\frac{dv}{dx} = v - v^2$

$x\frac{dv}{dx} = -v^2$

$\frac{dx}{x} = \frac{-dv}{v^2}$

2015 دور (2) خارج

2017 دور (3) احيائي - داخل

2019 دور (1) تطبيقي

$\frac{dx}{x} = -v^{-2}\,dv$

$\int\frac{dx}{x} = \int -v^{-2}\,dv$

$\ln|x| = v^{-1} + c$

$\ln|x| = \frac{1}{v} + c$

$\ln|x| = \frac{1}{\frac{y}{x}} + c$

$\ln|x| = \frac{x}{y} + c$

$\frac{x}{y} = \ln|x| - c$

$y = \frac{x}{\ln|x| - c}$

حل المعادلة التفاضلية $y' = \dfrac{y^2}{xy + x^2}$

50

2015 دور (4) رصـــافة

Sol:

نقسم البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$y' = \frac{y^2}{xy + x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy + x^2}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})^2}{(\frac{y}{x}) + 1}$$

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v^2}{v+1} \ldots\ldots(1$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \ldots\ldots(2$$

نعوض (2) في (1)

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{v+1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2}{v+1} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - v(v+1)}{v+1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - v^2 - v}{v+1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v}{v+1}$$

$$x(v+1)\, dv = -v\, dx$$

$$\int \frac{(v+1)}{v}\, dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{v}{v}\, dv + \int \frac{1}{v}\, dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\int dv + \int \frac{1}{v}\, dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$v + \ln|v| = -\ln|x| + c$$

$$\frac{y}{x} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|x| + c$$

2018 دور (1) احيائي - داخل

....

....

....

....

....

....



حل المعادلة التفاضلية

$$x^2y\,dx = (x^3 + y^3)\,dy$$

51

2016 دور (1)

Sol:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{(x^3+y^3)}$$

نقسم البسط والمقام على $x^3 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2y}{x^3}}{\frac{x^3+y^3}{x^3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(\frac{y}{x})}{1+(\frac{y}{x})^3}$$

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{1+v^3} ......(1$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} ......(2$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

نعوض 2 في 1

2019 دور (2) تطبيقي

2019 تمهيدي تطبيقي

2017 دور (2) احيائي موصل

2018 دور (1) تطبيقي - داخل

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1+v^3} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v - v(1+v^3)}{1+v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v - v - v^4}{1+v^3}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^4}{1+v^3} \Rightarrow -\frac{dx}{x} = \frac{1+v^3}{v^4}\,dv$$

$$-\int\frac{dx}{x} = \int\frac{1+v^3}{v^4}\,dv$$

$$-\int\frac{dx}{x} = \int\frac{1}{v^4}\,dv + \int\frac{v^3}{v^4}\,dv$$

$$-\int\frac{dx}{x} = \int v^{-4}\,dv + \int\frac{1}{v}\,dv$$

$$-\ln|x| = -\frac{1}{3}v^{-3} + \ln|v| + \ln|c| \quad ,c > 0$$

$$-\ln|x| = -\frac{1}{3v^3} + \ln|v| + \ln|c|$$

$$\frac{1}{3v^3} = \ln|x| + \ln|v| + \ln|c|$$

$$\frac{1}{3v^3} = \ln|cxv|$$

$$\frac{1}{3(\frac{y}{x})^3} = \ln\left|cx(\frac{y}{x})\right|$$

$$\frac{1}{\frac{3y^3}{x^3}} = \ln|cy| \Rightarrow \frac{x^3}{3y^3} = \ln|cy|$$

$$y^3 = \frac{x^3}{3\ln|cy|} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt[3]{3\ln|cy|}}$$



حل المعادلة التفاضلية

$$(x^2+3y^2)\,dx-2xy\,dy=0$$

52

2016 دور (2)

Sol:

$$2xy\,dy=(x^2+3y^2)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3y^2}{2xy}$$

نقسم البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{x^2+3y^2}{x^2}}{\dfrac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+3(\frac{y}{x})^2}{2(\frac{y}{x})}$$

نفرض ان $\frac{y}{x}=v$ لينتج

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+3v^2}{2v}\;.....(1$$

نشتق العلاقة $y=vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\;.....(2$$

نعوض (2) في (1)

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v^2}{2v}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v^2-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{2v\,dv}{1+v^2}$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{2v\,dv}{1+v^2}$$

$$\ln|x|=\ln\left|1+v^2\right|+\ln c\;,\; c>0$$

$$\ln|x|=\ln\left|c(1+v^2)\right|$$

$$|x|=\left|c(1+v^2)\right|$$

$$x=\pm\,c(1+v^2)$$

$$x=\pm\,c\left(1+(\frac{y}{x})^2\right)$$

$$x=\pm\,c\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$$

53 حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$

Sol :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$$

نقسم البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2 - x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(\frac{y}{x})^2 - 1}{2(\frac{y}{x})}$$

نفرض ان $\frac{y}{x} = v$ لينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} .....(1$$

نشتق العلاقة $y = vx$ بالنسبة الى المتغير x لينتج

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} .....(2$$

نعوض (2) في (1)

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1 - 2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

$$(v^2 - 1)\, dx = 2vx\, dv$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2v\, dv}{(v^2 - 1)}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2v\, dv}{(v^2 - 1)}$$

$$\ln|x| = \ln|v^2 - 1| + \ln c \; , \; c > 0$$

$$\ln|x| = \ln|c(v^2 - 1)|$$

$$x = \pm c(v^2 - 1)$$

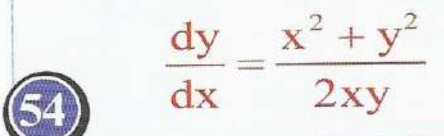
$$c = \pm \frac{x}{(\frac{y}{x})^2 - 1} \Rightarrow c = \pm \frac{x}{\frac{y^2}{x^2} - 1}$$

$$c = \pm \frac{x^3}{y^2 - x^2}$$

2016 دور (1) خارج

2017 دور (3) احيائي - داخل

2018 دور (2) احيائي خارج


جد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}$$

54

Sol:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{2\frac{y}{x}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}\,........(1)$$

$$v=\frac{y}{x}\Rightarrow y=xv$$

$$\frac{dy}{dt}=x\frac{dv}{dx}+v.......(2)$$

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{1+v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}-v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{2v}$$

$$\frac{2v}{1-v^2}\,dv=\frac{dx}{x}$$

$$-\int\frac{-2v}{1-v^2}dv=\int\frac{dx}{x}$$

$$-Ln\left|1-v^2\right|=Lnx+Lnc$$

$$Ln\left|1-v^2\right|^{-1}=Lnx+Lnc$$

$$\frac{1}{1-v^2}=x+c$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{y^2}{x^2}}=x+c$$

$$\frac{1}{\frac{x^2-y^2}{x^2}}=x+c$$

$$\frac{x^2}{x^2-y^2}=x+c$$

2019 دور (3) تطبيقي

2019 دور (1) احيائي - خارج